数理解析研究所講究録
1162巻 2000年 53-79

BMO とその応用
— 内山明人氏の因数分解定理 —

宮地晶彦
(Miyachi, Akihiko 東京女子大学文理学部) *

0 Introduction

複素平面の単位円板上の複素正則関数の Hardy クラスを $\mathbb{H}^p$ $(0<p<\infty)$ で表す.

F. Riesz の定理によると, $F\in\mathbb{H}^p$ ならば, $F(z)$ の零点から作った Blaschke 積 $B(z)$ は単位円内で収束して,

$$F(z)=B(z)F_0(z) \tag{1}$$

と因数分解したとき, $F_0\in\mathbb{H}^p$ である. (例えば [Z, Chapt. VII, §7] 参照.)

これを使うと容易に次の定理が証明できる.

定理A. $0<p,q,r<\infty$ かつ $1/p=1/q+1/r$ とする. このとき, すべての $G\in\mathbb{H}^q$ と $H\in\mathbb{H}^r$ に対して, 積 $G(z)H(z)$ は $\mathbb{H}^p$ に属す. 逆に, 任意の $F\in\mathbb{H}^p$ に対して, $G\in\mathbb{H}^q$ と $H\in\mathbb{H}^r$ で

$$F(z)=G(z)H(z) \tag{2}$$

なるものが存在する.

[証明] 前半は Hölder の不等式からあきらかである. 逆に $F\in\mathbb{H}^p$ のとき, (1) の $F_0(z)$ は零点を持たない正則関数であるから, その任意のべきが単位円板上の正則関数として定義できる. ゆえに, $G(z)=B(z)F_0(z)^{p/q}$, $H(z)=F_0(z)^{p/r}$ ととればよい. 証明終わり.

$\mathbb{H}^p$ の関数は distribution の意味で単位円周上に境界値を持つ. $\mathbb{H}^p$ の関数の実部の境界値として現れる単位円周上の distribution の全体をしばらく H^p_{real} で表すことにする. 関数 $F(z)$ と $iF(z)$ とは同時に $\mathbb{H}^p$ に属すから, $\mathbb{H}^p$ の関数の虚部の境界値の全体も H^p_{real} である.

分解 (2) の境界値を実部と虚部に分けて書くと,

$$f+i\tilde{f}=(g+i\tilde{g})(h+i\tilde{h}) \tag{3}$$

*E-mail:miyachi@twcu.ac.jp

となる. ここで, $\tilde{}$ は単位円周上の Hilbert 変換である. この (3) の虚部をとることによって, 次の定理が得られる.

定理A′. $0 < p, q, r < \infty$ は定理Aと同じ仮定をみたすとする. $g \in H^q_{\mathrm{real}}$, $h \in H^r_{\mathrm{real}}$ ならば $\tilde{g}h + g\tilde{h} \in H^p_{\mathrm{real}}$. 逆に, 任意の $f \in H^p_{\mathrm{real}}$ に対して, $g \in H^q_{\mathrm{real}}$ と $h \in H^r_{\mathrm{real}}$ で

$$f = \tilde{g}h + g\tilde{h}$$

なるものが存在する.

上で述べた 定理A′ ($\approx$ 定理A) の証明は, Blaschke 積によって零点を除くこと, 正則関数のべきを作ること等, 複素関数論を使っている. 空間 H^q_{real} は最大関数や Littlewood-Paley 関数などを用いて実関数論的に特徴づけられる ([BGS], [FS]) ので, 定理A′ も純粋に実関数論の方法による証明を与えたい. 更に, 空間 H^p_{real} を Fefferman-Stein の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ で置き換え, Hilbert 変換を $\mathbb{R}^n$ 上の Calderón-Zygmund 作用素で置き換えて, 定理A′ を一般化したい.

この実関数論的証明と一般化は, 定理A′ の前半に対しては得られている. すなわち, いくつかの特異積分の積として定義される双線型写像の $H^p(\mathbb{R}^n)$ 空間の間での有界性が示されている ([CRW], [U1], [M1]).

しかし, 定理A′ の後半 — 因数分解 — に対しては, 弱い形でしか得られていない. すなわち, 実関数論のアトム分解を使う方法によって, $0 < p \leqq 1$ の場合に, すべての $f \in H^p_{\mathrm{real}}$ が

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{g}_j h_j + g_j \tilde{h}_j),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\|g_j\|_{H^q_{\mathrm{real}}} \|h_j\|_{H^r_{\mathrm{real}}} \right)^p \leqq c \|f\|^p_{H^p_{\mathrm{real}}}$$

と書けること, および, この $H^p(\mathbb{R}^n)$ への一般化が得られているだけである ([CRW], [U1], [M2]).

ところが, 内山明人は [U2] において, H^p_{real} や Fefferman-Stain の $H^p(\mathbb{R}^n)$ とは異なるが, 特殊の形のマルチンゲールの H^p 空間に対して, 定理A′ の因数分解に相当することを実関数論の方法で証明した. その方法は BMO や wavelet の応用として非常に興味深いものである. 論文 [U2] はプレプリントの形で出回っただけで雑誌などには発表されなかったようである.

この小文の目的は, [U2] を少し書き方を変えてくわしく紹介することである.

1 Triadic interval

1.1 定義. 文字 Ω は常に区間 $(0,1]$ を表す. Ω の可測部分集合 E の Lebesgue 測度を $|E|$ で表す.

次の形の区間を **triadic interval** という:

$$\left(\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}\right] \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots; \quad k = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots,\, 3^n).$$

(普通 triadic interval と言ったら, 上記の n, k は一般の整数を許すが, ここでは Ω に含まれる区間しか考えないから, 上のように制限したものを triadic interval と呼ぶことにする.) 長さ 3^{-n} の triadic interval の全体を $\mathcal{I}_n$ で表し, triadic interval の全体を $\mathcal{I}$ で表す. 以後 triadic interval は文字 I, J, K, R などで表すことにする.

ひとつの triadic interval J を3等分すると長さが J の 1/3 の3つの triadic interval ができるが, それを左の方から順に $J(1)$, $J(2)$, $J(3)$ と書く. また, $K \in \mathcal{I}$ で $|K| < 1$ のとき, K を含む triadic interval で長さが K の 3 倍の triadic interval が唯ひとつあるから, それを, $\tilde{K}$ と書く. Ω に対しては $\tilde{\Omega} = (0, 3]$ としておく.

次の命題は簡単なことだが triadic interval の重要な性質である.

1.2 命題. J, K が triadic interval のとき, $J \cap K \neq \emptyset$ となるのは $J \subset K$ または $J \supset K$ のときに限る.

1.3 定義. $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$ のとき, $\mathcal{G}$ の元のうち包含関係に関して極大なもの, すなわち $J \in \mathcal{G}$ で

$$K \in \mathcal{G} \text{ かつ } K \supset J \Longrightarrow K = J$$

をみたす J, の全体を $\mathcal{G}^{\max}$ と書く.

命題 1.2 から次がわかる.

1.4 命題. 任意の $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$ に対して, $\mathcal{G}^{\max}$ に属す任意の異なる 2 つの区間は互いに素であり, しかも

$$\bigcup_{J \in \mathcal{G}} J = \bigcup_{J \in \mathcal{G}^{\max}} J.$$

したがって, とくに,

$$\left| \bigcup_{J \in \mathcal{G}} J \right| = \sum_{J \in \mathcal{G}^{\max}} |J|.$$

2 関数空間 BMO

2.1 定義. $f \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\|f\|'_{\mathrm{BMO}} = \sup_{J \in \mathcal{I}} \left\{ |J|^{-1} \int_J |f(x) - f_J| dx \right\}$$

(ただし $f_J = |J|^{-1} \int_J f(y) dy$) と定義し, $\|f\|'_{\mathrm{BMO}} < \infty$ なる $f \in L^1(\Omega)$ の全体を BMO と定義する.

注意: この BMO は triadic BMO と呼ぶべきもので, 区間 (0,1] 上の通常の BMO とは違うものである.

次は BMO の重要な性質である.

2.2 John-Nirenberg の定理([JN]). 正定数 c があって, すべての $f \in \mathrm{BMO}$ とすべての $\lambda > 0$ に対して

$$|\{(f - f_\Omega)^* > \lambda\}| \leqq c \exp(-\lambda / c\|f\|'_{\mathrm{BMO}}).$$

ただし,

$$(f - f_\Omega)^*(x) = \sup\{|f_J - f_\Omega| \,;\, \mathcal{I} \ni J \ni x\} \qquad (x \in \Omega).$$

上の定理で記号 $\{(f - f_\Omega)^* > \lambda\}$ は集合 $\{x \in \Omega;\ (f - f_\Omega)^*(x) > \lambda\}$ を表す. 同様の略記を今後も使う.

この定理の系として次が得られる.

2.3 系. すべての $f \in \mathrm{BMO}$ に対して

$$\sup_{J \in \mathcal{I}} \left(|J|^{-1} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx \right)^{1/2} \approx \|f\|'_{\mathrm{BMO}}.$$

詳しく言うと, $f \in \mathrm{BMO}$ なるためには $f \in L^2(\Omega)$ で上の左辺が有限であることが必要十分であって, 上記 $\approx$ が成り立つ.

系 2.3 の式の左辺は L^2-method を使うとき扱いやすいので, あらためて次のように定義しておく.

2.4 定義.

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{J \in \mathcal{I}} \left(|J|^{-1} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx \right)^{1/2}.$$

次の命題は容易にわかる.

2.5 命題. $f \in L^\infty(\Omega)$ ならば $f \in \mathrm{BMO}$ であり, $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqq \|f\|_{L^\infty}$.

3 マルチンゲール

3.1 定義. マルチンゲールとは, triadic interval 全体 $\mathcal{I}$ を添字集合とする実数の族 $f = (f_J)_{J \in \mathcal{I}}$ であって, すべての $J \in \mathcal{I}$ に対して

$$f_J = \frac{f_{J(1)} + f_{J(2)} + f_{J(3)}}{3}$$

が成り立つものである.

この定義は普通の確率論でいうマルチンゲールとは少し違っている. $f=(f_J)_{J\in\mathcal{I}}$ が上の定義のマルチンゲールのとき, Ω 上の関数 F_n を

$$F_n=\sum_{J\in\mathcal{I}_n} f_J\chi_J$$

で定めると, 列 $\{F_n\}$ が普通の確率論でいうマルチンゲールになる.

3.2 記号. $\mathbb{R}^3$ は 3 項縦ベクトルの空間とする. $\mathbb{R}^3$ のベクトルを表すのに $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ などの文字を使う.

$\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^3$ を次のように定義する:

$$\mathcal{V}=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,;\,x_1+x_2+x_3=0\right\}.$$

$f=(f_J)$ がマルチンゲールのとき, 各 $J\in\mathcal{I}$ に対して

$$\Delta_J(f)=\begin{pmatrix}f_{J(1)}-f_J\\f_{J(2)}-f_J\\f_{J(3)}-f_J\end{pmatrix}$$

と定義する. $\Delta_J(f)\in\mathcal{V}$ である.

$\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$ と $J\in\mathcal{I}$ に対して, Ω 上の関数 $w_J[\boldsymbol{x}]$ を

$$w_J[\boldsymbol{x}]=x_1\chi_{J(1)}+x_2\chi_{J(2)}+x_3\chi_{J(3)}$$

で定義する.

J, R が triadic interval で $J\supset\tilde{R}$ ならば, 関数 $w_J[\boldsymbol{x}]$ は R 上で定数である. この定数値を $w_J[\boldsymbol{x}](R)$ と書く.

3.3. さて, マルチンゲール $f=(f_J)_J$ から, f_Ω (f の'初期値' または '平均値') と $\mathcal{V}$ のベクトルの族 $(\Delta_J(f))_J$ とが決まるわけだが, 逆に, 実数 a と $\mathcal{V}$ のベクトルの族 $(\boldsymbol{d}_J)_{J\in\mathcal{I}}$ とが任意に与えられたら, $f_\Omega=a$, $\Delta_J(f)=\boldsymbol{d}_J$ ($\forall J\in\mathcal{I}$) となるマルチンゲール $f=(f_J)_J$ が唯ひとつ決まる. $f_\Omega=a$ と $\Delta_J(f)=\boldsymbol{d}_J$ から $f=(f_J)$ を出す公式は

$$f_R=f_\Omega+\sum_{J\supset\tilde{R}} w_J[\Delta_J(f)](R)=a+\sum_{J\supset\tilde{R}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R) \tag{4}$$

である.

3.4. 関数 $F\in L^1(\Omega)$ が与えられたら, 各 $J\in\mathcal{I}$ に対して

$$f_J=|J|^{-1}\int_J F(x)dx \tag{5}$$

と定めると $(f_J)_J$ はマルチンゲールになる. そして, ほとんどすべての $x \in \Omega$ において

$$F(x) = \lim_{J \downarrow \{x\}} f_J$$

(右辺は $J \ni x$ なる $J \in \mathcal{I}$ で $|J| \to 0$ としたときの極限) が成り立つから, 写像 $F \mapsto (f_J)_J$ は1対1である. この対応 $F \leftrightarrow (f_J)_J$ によって, 関数 $F \in L^1(\Omega)$ をマルチンゲール $(f_J)_J$ と同一視する. 更に, マルチンゲール $f = (f_J)_J$ が或 $F \in L^1(\Omega)$ から (5) によって得られるとき, しばしば, 関数 F を表すのにマルチンゲールと同じ記号 f を用い, $F = f$ と書いてしまうことにする. (注意: すべてのマルチンゲールがこのようにして或関数 $F \in L^1(\Omega)$ から得られるわけではない.)

$L^p(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ や BMO は, $L^1(\Omega)$ の部分空間なので, 上の同一視 $F \leftrightarrow (f_J)_J$ によってマルチンゲールの空間とみなす. すなわち, マルチンゲール $f = (f_J)_J$ が或 $F \in L^p(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ から (5) によって与えられているとき $f \in L^p$ と定義し, ノルムも

$$\|f\|_{L^p} = \|F\|_{L^p(\Omega)}$$

で定義する. BMO についても同様である.

マルチンゲールの L^p や BMO をマルチンゲールの言葉だけで ((5) の F を経由せずに) 特徴付けておくと具合がよい. ここでは L^2 と BMO と L^∞ について特徴付けを与えておく.

3.5 命題. $f = (f_J)_J$ をマルチンゲールとする. $f \in L^2$ なるための必要十分条件は,

$$\sum_{J \in \mathcal{I}} |\Delta_J(f)|^2 |J| < \infty$$

が成り立つことであり, しかも, このとき,

$$\|f\|_{L^2} = |f_\Omega|^2 + 3^{-1} \sum_{J \in \mathcal{I}} |\Delta_J(f)|^2 |J|. \tag{6}$$

[証明] $f \in L^2(\Omega)$ からマルチンゲール $(f_J)_J$ を

$$f_J = |J|^{-1} \int_J f(x)dx \tag{7}$$

で定めたとき, (6) が成り立つことを示そう. 詳しい極限移行の議論は省略する.

公式 (4) によって,

$$f - f_\Omega = \sum_{J \in \mathcal{I}} w_J[\Delta_J(f)].$$

関数の族 $(w_J[\Delta_J(f)])_{J \in \mathcal{I}}$ は $L^2(\Omega)$ で互いに直交する関数の族であり,

$$\|w_J[\Delta_J(f)]\|^2_{L^2(\Omega)} = |\Delta_J(f)|^2 3^{-1} |J|$$

であるから, 上の $f-f_\Omega$ の式から,

$$\|f-f_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2=\sum_{J\in\mathcal{I}}|\Delta_J(f)|^2 3^{-1}|J|. \tag{8}$$

$f-f_\Omega$ と定数値関数 f_Ω も直交するから (6) が得られる.

逆の証明は省略する. 証明終わり.

3.6 命題. $f=(f_J)_J$ をマルチンゲールとする. $f\in\mathrm{BMO}$ なるための必要十分条件は, 定数 $A\in(0,\infty)$ があって, すべての $K\in\mathcal{I}$ に対して

$$3^{-1}\sum_{J\in\mathcal{I},\,J\subset K}|\Delta_J(f)|^2|J|\leqq A^2|K|$$

が成り立つことであり, このとき, $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ はそのような定数 A の下限に等しい.

[証明] 命題 3.5 の証明と同様に $f\in L^2(\Omega)$ に対して f_J を (7) で定めると, (8) と同様に, 任意の $K\in\mathcal{I}$ について

$$\|f-f_K\|_{L^2(K)}^2=3^{-1}\sum_{J\in\mathcal{I},\,J\subset K}|\Delta_J(f)|^2|J|$$

が成り立つ. 命題 3.6 はこの等式を用いて容易に証明できる. 証明終り.

3.7 命題. $f=(f_J)_J$ をマルチンゲールとする. $f\in L^\infty$ なるための必要十分条件は $\{f_J\}$ が有界なことであって,

$$\|f\|_{L^\infty}=\sup\{|f_J|\,;\,J\in\mathcal{I}\}.$$

この命題の証明はやさしいから省略する.

4 最大関数と H^p

4.1 定義. マルチンゲール $f=(f_J)_J$ に対して, **最大関数** f^* を

$$f^*(x)=\sup\{|f_J|\,;\,x\in J\in\mathcal{I}\}\quad(x\in\Omega)$$

で定義する.

4.2 命題. すべての $f\in L^1$ とすべての $\lambda>0$ に対して

$$|\{f^*>\lambda\}|\leqq\lambda^{-1}\|f\|_{L^1}.$$

[証明] $\mathcal{G}=\{J\in\mathcal{I}\,;\,|f_J|>\lambda\}$ とおくと

$$\{f^*>\lambda\}=\bigcup_{J\in\mathcal{G}}J=\bigcup_{J\in\mathcal{G}^{\max}}J$$

であり, $\mathcal{G}^{\max}$ は disjoint family である. 各 $J \in \mathcal{G}$ に対しては, $|J|^{-1}\int_J |f(x)|dx \geqq |f_J| > \lambda$ より

$$|J| < \lambda^{-1}\int_J |f(x)|dx.$$

ゆえに,

$$|\{f^* > \lambda\}| = \sum_{J \in \mathcal{G}^{\max}} |J| \leqq \sum_{J \in \mathcal{G}^{\max}} \lambda^{-1}\int_J |f(x)|dx \leqq \lambda^{-1}\int_\Omega |f(x)|dx.$$

証明終わり.

命題 4.2 と自明な不等式 $\|f^*\|_{L^\infty} \leqq \|f\|_{L^\infty}$ とを補間することにより, 次の命題が得られる.

4.3 命題. $1 < p \leqq \infty$ のとき, マルチンゲール f について, $f \in L^p$ なるためには $f^* \in L^p(\Omega)$ なることが必要十分であり, $\|f\|_{L^p} \approx \|f^*\|_{L^p(\Omega)}$.

4.4 定義. マルチンゲール f と $0 < p < \infty$ に対して

$$\|f\|_{H^p} = \|f^*\|_{L^p(\Omega)}$$

と定義し, $\|f\|_{H^p} < \infty$ なるマルチンゲール f の全体を H^p と定義する.

命題 4.3 により, $1 < p < \infty$ のときは $H^p = L^p$ かつ $\|f\|_{H^p} \approx \|f\|_{L^p}$ である.

もうひとつの最大関数を定義しておく.

4.5 定義. マルチンゲール $f = (f_J)_J$ に対して,

$$f^{**}(x) = \sup_{\mathcal{I} \ni J \ni x} \{|f_{J(1)}| \vee |f_{J(2)}| \vee |f_{J(3)}|\} \qquad (x \in \Omega).$$

ただし, $a \vee b = \max\{a, b\}$.

4.6 命題. $|\{f^{**} > \lambda\}| \leqq 3|\{f^* > \lambda\}| \qquad (\forall \lambda > 0)$.

[証明] $E = \{f^* > \lambda\}$ とおく. $f^{**}(x) > \lambda$ ならば, $\mathcal{I} \ni J \ni x$ かつ $|f_{J(i)}| > \lambda$ なる $J \in \mathcal{I}$ と $i \in \{1, 2, 3\}$ があり, このとき $J(i) \subset E$ だから,

$$(\chi_E)^*(x) \geqq |J|^{-1}|J \cap E| \geqq |J|^{-1}|J(i)| = 3^{-1}.$$

ゆえに $\{f^{**} > \lambda\} \subset \{(\chi_E)^* \geqq 3^{-1}\}$. 命題 4.2 より, 結論を得る. 証明終わり.

命題 4.6 と明らかな不等式 $f^{**}(x) \geqq f^*(x)$ とから, 次の系が得られる.

4.7 系. $0 < p < \infty$ のとき, $\|f^{**}\|_{L^p} \approx \|f^*\|_{L^p} = \|f\|_{H^p}$.

5 特異積分作用素

5.1 定義. $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ への線型写像 A に対して, マルチンゲールをマルチンゲールに移す写像 T_A を次のように定義する: $f = (f_J)$ がマルチンゲールのとき, マルチンゲール $T_A f = g = (g_J)$ を

$$g_\Omega = 0, \qquad \Delta_J(g) = A\Delta_J(f)$$

で定義する.

5.2 命題. 写像 $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ の作用素ノルムを $|A|$ で表すと,

$$\|T_A f\|_{\mathrm{BMO}} \leqq |A| \|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

[証明] 各 $J \in \mathcal{I}$ に対して $|\Delta_J(T_A f)| \leqq |A||\Delta_J(f)|$ が成り立つこと命題 3.6 から直ちにわかる. 証明終わり.

T_A が H^p $(0 < p < \infty)$ で有界であることをこの命題 5.2 と John-Nirenberg の定理 (§2) を使って証明してみよう.

5.3 命題. すべての $0 < p < \infty$ に対して

$$\|T_A f\|_{H^p} \leqq c_p |A| \|f\|_{H^p}.$$

[証明] $f = (f_J)$, $\|f\|_{H^p} = 1$, $f_\Omega = 0$, $|A| = 1$ として, $\|T_A f\|_{H^p} \leqq c_p$ を示せばよい.

各非負整数 n に対して

$$\mathcal{G}_n = \begin{cases} \mathcal{I} & (n = 0) \\ \{J \in \mathcal{I};\, |f_{J(1)}| \vee |f_{J(2)}| \vee |f_{J(3)}| > 2^n\} & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

とおく.

$\{\mathcal{G}_n\}$ は triadic interval の族の減少列で $\mathcal{G}_n \downarrow \emptyset$ である.

$\mathcal{G}_n$ のうちの極大な区間の全体 $\mathcal{G}_n^{\max}$ について次のことが成り立つ.

(a) $\mathcal{G}_0^{\max} = \{\Omega\}$.

(b) 任意の $J \in \mathcal{G}_{n+1}^{\max}$ に対して, $J \subset K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ なる K がただひとつ存在する.

(c) $\bigcup_{J \in \mathcal{G}_n} J \subset \{f^{**} + 2 > 2^n\}$.

(実際, 左辺は $n = 0$ ならば Ω に等しく, $n \geqq 1$ ならば $\{f^{**} > 2^n\}$ に等しい.)

(d) $\sum_{J \in \mathcal{G}_n^{\max}} |J| \leqq |\{f^{**} + 2 > 2^n\}|$.

(e) $K \in \mathcal{G}_n^{\max} \Longrightarrow |f_K| \leqq 2^n$.

$\mathcal{H}_n$ を次で定義する:

$$\mathcal{H}_n = \{J \in \mathcal{I};\, \exists K \in \mathcal{G}_n,\ K \supset J\}.$$

$\mathcal{H}_0 = \mathcal{I}$ であり, $\{\mathcal{H}_n\}$ は triadic interval の族の減少列で, $\mathcal{H}_n \downarrow \emptyset$ である.
以下 $\Delta_J(f) = \boldsymbol{d}_J$ と書く. 各 $R \in \mathcal{I}$ について

$$f_R = \sum_{J \supset \tilde{R}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \supset \tilde{R} \\ J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R)$$

だから, マルチンゲール $f^{(n)} = (f_R^{(n)})_{R \in \mathcal{I}}$ を

$$f_R^{(n)} = \sum_{\substack{J \supset \tilde{R} \\ J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R)$$

によって定義すると,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}$$

と分解できる.
$f^{(n)} \in L^\infty$ で

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty} \leqq 3 \cdot 2^n \tag{9}$$

である. 実際, $\tilde{R} \notin \mathcal{H}_n$ なら $f_R^{(n)} = 0$ であるし; $\tilde{R} \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ なら, $\tilde{R} \subset K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ なる K があって

$$\begin{aligned} |f_R^{(n)}| &= \left| \sum_{K \supset J \supset \tilde{R}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R) \right| = |f_R - f_K| \\ &\leqq |f_R| + |f_K| \leqq 2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n; \end{aligned}$$

また $\tilde{R} \in \mathcal{H}_{n+1}$ なら, $\tilde{R} \subset I \subset K$ なる $I \in \mathcal{G}_{n+1}^{\max}$ と $K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ があって

$$\begin{aligned} |f_R^{(n)}| &= \left| \sum_{K \supset J \supset \tilde{I}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R) \right| = |f_I - f_K| \\ &\leqq |f_I| + |f_K| \leqq 2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n. \end{aligned}$$

$g = T_A f$, $g^{(n)} = T_A f^{(n)}$ と書く. $g = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}$ である.

$\Delta_J(g^{(n)}) \neq \boldsymbol{0}$ となるのは $J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ のときに限るから, $g_R^{(n)} \neq 0$ となるのは $\tilde{R} \subset J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ なる J があるときに限る. したがって,

$$g_R^{(n)} \neq 0 \Longrightarrow \tilde{R} \in \mathcal{H}_n. \tag{10}$$

写像 T_A の BMO 有界性 (命題 5.2) と命題 2.5 と (9) を順に使って

$$\|g^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq c\|f^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq c\|f^{(n)}\|_{L^\infty} \leqq c\,2^n.$$

ゆえに, 各 $K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ について, John-Nirenberg の定理より

$$|\{x \in K\,;\,(g^{(n)})^*(x) > \lambda\}| \leqq c\exp(-\lambda/c2^n)|K|$$

である. ((10) より $g_K^{(n)} = 0$ であることに注意.) これを K について加えて

$$|\{(g^{(n)})^* > \lambda\}| \leqq c\exp(-\lambda/c2^n) \sum_{K\in\mathcal{G}_n^{\max}} |K|.$$

したがって (d) と合わせて

$$|\{(g^{(n)})^* > \lambda\}| \leqq c\exp(-\lambda/c2^n)|\{f^{**} + 2 > 2^n\}|. \tag{11}$$

また, (10) より, $g_R^{(n)} \neq 0$ となるのは $\tilde{R} \subset K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ なる K があるときに限るから,

$$\{(g^{(n)})^* > 0\} \subset \bigcup_{K\in\mathcal{G}_n^{\max}} K \subset \{f^{**} + 2 > 2^n\}. \tag{12}$$

上のふたつの評価 (11), (12) と明らかな不等式

$$g^*(x) \leqq \sum_{j=0}^{\infty} (g^{(j)})^*(x)$$

とから下のようにして $\|g^*\|_{L^p} \leqq c$ を導くことができる.

$0 < \epsilon < 1$ なる ϵ をひとつとる. (例えば $\epsilon = 1/2$ としてしまってもよい.)

まず整数 $n \geqq 0$ について, $|\{g^* > 2^n\}|$ の評価を出そう. もしも $f^{**}(x) + 2 \leqq 2^n$ であり, かつ $j = 0, 1, \cdots, n-1$ について

$$(g^{(j)})^*(x) \leqq 2^n(2^\epsilon - 1)2^{(j-n)\epsilon}$$

であるならば, (12) から $j \geqq n$ について $(g^{(j)})^*(x) = 0$ であるから,

$$g^*(x) \leqq \sum_{j=0}^{\infty} (g^{(j)})^*(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (g^{(j)})^*(x) \leqq \sum_{j=0}^{n-1} 2^n(2^\epsilon - 1)2^{(j-n)\epsilon} \leqq 2^n$$

となる. ゆえに

$$\{g^* > 2^n\} \subset \{f^{**} + 2 > 2^n\} \cup \bigcup_{j=0}^{n-1} \{(g^{(j)})^* > 2^n(2^\epsilon - 1)2^{(j-n)\epsilon}\}.$$

したがって, (11) を用いて, 次の評価を得る:

$$\begin{aligned}
&|\{g^* > 2^n\}| \\
&\leqq |\{f^{**} + 2 > 2^n\}| + \sum_{j=0}^{n-1} |\{(g^{(j)})^* > 2^n(2^\epsilon - 1)2^{(j-n)\epsilon}\}| \\
&\leqq |\{f^{**} + 2 > 2^n\}| + \sum_{j=0}^{n-1} c\exp(-c^{-1}(2^\epsilon - 1)2^{(n-j)(1-\epsilon)})|\{(f^{**} + 2 > 2^j\}| \\
&\leqq c\sum_{j=0}^{n} \exp(-c^{-1}2^{(n-j)(1-\epsilon)})|\{(f^{**} + 2 > 2^j\}|
\end{aligned}$$

(最後の不等式のところで c は大きいものに取り換えた).

この評価を用いて,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} 2^{np}|\{g^* > 2^n\}| \\
&\leqq c\sum_{n=0}^{\infty} 2^{np}\sum_{j=0}^{n}\exp(-c^{-1}2^{(n-j)(1-\epsilon)})|\{(f^{**}+2 > 2^j\}| \\
&= c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jp}|\{(f^{**}+2 > 2^j\}|\sum_{n=j}^{\infty} 2^{(n-j)p}\exp(-c^{-1}2^{(n-j)(1-\epsilon)}) \\
&\leqq c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jp}|\{(f^{**}+2 > 2^j\}| \\
&\leqq c\|f^{**}+2\|_{L^p}^p \leqq c.
\end{aligned}$$

一方, $n < 0$ については $|\{g^* > 2^n\}| \leqq |\Omega| = 1$ より, あきらかに,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{np}|\{g^* > 2^n\}| \leqq \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{np} \leqq c.$$

こうして

$$\|g\|_{H^p}^p = \|g^*\|_{L^p}^p \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{np}|\{g^* > 2^n\}| \leqq c$$

が示された. 命題 5.3 の証明終わり.

6 マルチンゲールの積

6.1. これ以後の節においては A を $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ の線型写像とする.

$\mathcal{V}$ における内積を, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ のとき

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

で定義する. この内積に関する A の随伴作用素を A' とする.

6.2 定義. マルチンゲール $g = (g_J)$ と $h = (h_J)$ の積 $f = (f_J)$ を

$$f_J = (T_A g)_J h_J - g_J (T_{A'} h)_J \tag{13}$$

で定義する.

6.3 定理. $g = (g_J)$ と $h = (h_J)$ がマルチンゲールならば, (13) で定義される $f = (f_J)$ もマルチンゲールである. 更に, $0 < p,\ q,\ r < \infty$, $1/p = 1/q + 1/r$ なる $p,\ q,\ r$ に対して,

$$\|f\|_{H^p} \leqq c\|g\|_{H^q}\|h\|_{H^r}. \tag{14}$$

[証明] 定義 (13) から

$$\begin{aligned}
&f_{J(i)} - f_J \\
&= \ (T_A g)_J(h_{J(i)} - h_J) + ((T_A g)_{J(i)} - (T_A g)_J)h_J \\
&\quad + ((T_A g)_{J(i)} - (T_A g)_J)(h_{J(i)} - h_J) \\
&\quad - g_J((T_{A'}h)_{J(i)} - (T_{A'}h)_J) - (g_{J(i)} - g_J)(T_{A'}h)_J \\
&\quad - (g_{J(i)} - g_J)((T_{A'}h)_{J(i)} - (T_{A'}h)_J).
\end{aligned}$$

$i = 1,\ 2,\ 3$ についての和をとると, $g,\ T_A g,\ h,\ T_{A'}h$ がマルチンゲールであることから右辺の第 1, 2, 4, 5 項の和は 0 になるから,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}(f_{J(i)} - f_J) \\
&= \sum_{i=1}^{3}((T_A g)_{J(i)} - (T_A g)_J)(h_{J(i)} - h_J) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{3}(g_{J(i)} - g_J)((T_{A'}h)_{J(i)} - (T_{A'}h)_J) \\
&= \langle \Delta_J(T_A g),\ \Delta_J(h)\rangle - \langle \Delta_J(g),\ \Delta_J(T_{A'}h)\rangle \\
&= \langle A\Delta_J(g),\ \Delta_J(h)\rangle - \langle \Delta_J(g),\ A'\Delta_J(h)\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ゆえに (f_J) はマルチンゲールである.

最大関数について, 各 $x \in \Omega$ において不等式

$$f^*(x) \leqq (T_A g)^*(x)h^*(x) + g^*(x)(T_{A'}h)^*(x)$$

が成り立つから, Hölder の不等式と命題 5.3 から (14) が得られる. 証明終わり.

7 内山の因数分解定理

7.1 定理([U2]). $0 < p,\ q,\ r < \infty$ かつ $1/p = 1/q + 1/r$ とする. $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ が実の固有値を持たないと仮定する. このとき, $f = (f_J) \in H^p$ かつ $f_\Omega = 0$ なるすべての

マルチンゲール f に対して, $g=(g_J)\in H^q$, $h=(h_J)\in H^r$, かつ $g_\Omega=h_\Omega=0$ なるマルチンゲール g と h が存在して,

$$f_J=(T_Ag)_Jh_J-g_J(T_{A'}h)_J \qquad (\forall J\in\mathcal{I})$$

と書ける. 更に, g, h は,

$$\|g\|_{H^q}\|h\|_{H^r}\leqq c\|f\|_{H^p}$$

をみたすようにとれる.

注意: $\dim\mathcal{V}=2$ だから実固有値をもたない A は存在する.

この定理を少し書き換えておく. そのためにいくつか記号を導入する.

7.2 記号. $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ で 2 項横ベクトルの空間を表す. $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ の元は $\vec{x}$, $\vec{y}$ などで表す. $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ における内積を, $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$ のとき

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{j=1}^{2}x_jy_j$$

と定義する.

$\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ に値をとるマルチンゲールを実数値のマルチンゲールと同様に定義する. すなわち, $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲールとは, $\mathcal{I}$ を添字集合とする $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ の元の族 $\vec{f}=(\vec{f}_J)_{J\in\mathcal{I}}$ であって, すべての $J\in\mathcal{I}$ に対して

$$\vec{f}_J=\frac{\vec{f}_{J(1)}+\vec{f}_{J(2)}+\vec{f}_{J(3)}}{3}$$

をみたすもののことである.

$\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲール $\vec{f}=(\vec{f}_J)$ にたいしても, $\Delta_J(\vec{f})$ を, 実数値のマルチンゲールのときと同様に,

$$\Delta_J(\vec{f})=\begin{pmatrix}\vec{f}_{J(1)}-\vec{f}_J\\ \vec{f}_{J(2)}-\vec{f}_J\\ \vec{f}_{J(3)}-\vec{f}_J\end{pmatrix}$$

で定義する. $\Delta_J(\vec{f})$ は 3×2 型の行列で, 各列の成分の和は 0 である.

また, $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲールに対しても, 実数値のマルチンゲールと同様に, 最大関数や L^p, H^p, BMO クラスのマルチンゲールを定義する. (実数に対して絶対値をとったところを $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ のベクトルのノルムで置き換える, という原則.) $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値マルチンゲールの L^p, H^p, BMO クラスも実数値のときと同じ記号 L^p, H^p, BMO で表すことにする.

7.3. さて, $g=(g_J)$, $h=(h_J)$ を実数値のマルチンゲールとして,

$$\vec{g}_J=((T_Ag)_J,g_J), \qquad \vec{h}_J=(h_J,-(T_{A'}h)_J)$$

とおくと, $(\vec{g}_J)$, $(\vec{h}_J)$ は $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲールであり, 6.2 で定義した g と h の積 $f=(f_J)$ は

$$f_J = (T_A g)_J h_J - g_J (T_{A'})_J = \vec{g}_J \cdot \vec{h}_J$$

と書ける. また, $\Delta_J(\vec{g})$, $\Delta_J(\vec{h})$ は

$$\Delta_J(\vec{g}) = \begin{pmatrix} \vec{g}_{J(1)} - \vec{g}_J \\ \vec{g}_{J(2)} - \vec{g}_J \\ \vec{g}_{J(3)} - \vec{g}_J \end{pmatrix} = (\Delta_J(T_A g), \Delta_J(g)) = (A\Delta_J(g), \Delta_J(g)),$$
$$\Delta_J(\vec{h}) = (\Delta_J(h), -\Delta_J(T_{A'} h)) = (\Delta_J(h), -A'\Delta_J(h)),$$

という形をしている. もしも, $g=(g_J)\in H^q$ $(0<q<\infty)$ ならば, T_A の H^q 有界性 (命題 5.3) により, $\vec{g}=(\vec{g}_J)\in H^q$ であり, $\vec{h}$ についても同様である.

次の定義を導入しよう.

7.4 定義. $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ の部分空間 S, S' を

$$S = \{(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,;\, \boldsymbol{x}\in\mathcal{V}\},$$
$$S' = \{(\boldsymbol{y}, -A'\boldsymbol{y})\,;\, \boldsymbol{y}\in\mathcal{V}\}$$

で定義する. $\vec{g}=(\vec{g}_J)$ が $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲールで, すべての $J\in\mathcal{I}$ に対して $\Delta_J(\vec{g})\in S$ であるとき, $\vec{g}$ を S-**マルチンゲール**という. $\vec{h}=(\vec{h}_J)$ が $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲールで, すべての $J\in\mathcal{I}$ に対して $\Delta_J(\vec{h})\in S'$ であるとき, $\vec{h}$ を S'-**マルチンゲール**という.

さて, 以上のことから, 定理 7.1 は次のように言い替えられる.

7.5 定理. $0<p, q, r<\infty$ かつ $1/p = 1/q + 1/r$ とする. $A:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ が実の固有値を持たないならば, $f=(f_J)\in H^p$ かつ $f_\Omega = 0$ なるすべての実数値マルチンゲール f に対して, S-マルチンゲール $\vec{g}=(\vec{g}_J)\in H^q$ と S'-マルチンゲール $\vec{h}=(\vec{h}_J)\in H^r$ で $\vec{g}_\Omega = \vec{h}_\Omega = \vec{0}$ なるものが存在して,

$$f_J = \vec{g}_J\cdot\vec{h}_J \qquad (\forall J\in\mathcal{I})$$

と書ける. 更に, $\vec{g}$ と $\vec{h}$ は

$$\|\vec{g}\|_{H^q}\|\vec{h}\|_{H^r} \leqq c\|f\|_{H^p}.$$

にとれる.

8　線型代数

8.1 この節を通じて, $A:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ は実の固有値を持たない線型写像であると仮定する.

定理 7.5 (=定理 7.1) を証明するために線型代数の補題をいくつか準備する.

8.2 記号. 3×2 行列

$$X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と書く. 3×2 行列 X のノルム $|X|$ は X の 6 個の成分の 2 乗の和の平方根として定義する. $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ と書く. 実数 b や横ベクトル $\vec{a} \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ に対して, $\mathbf{1}b$ や $\mathbf{1}\vec{a}$ は行列としての積を表す, すなわち

$$\mathbf{1}b = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{1}\vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{a} \\ \vec{a} \end{pmatrix}.$$

8.3 補題. 次のような正の定数 $C_{8.3}$ がある: $\vec{a} \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ かつ $|\vec{a}| = 1$ なるすべての $\vec{a}$ に対して

$$\{X \cdot (\mathbf{1}\vec{a})\,;\, X \in S,\ |X| \leqq C_{8.3}\} \supset \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{V};\ |\boldsymbol{u}| \leqq 1\},$$
$$\{(\mathbf{1}\vec{a}) \cdot Y\,;\, Y \in S',\ |Y| \leqq C_{8.3}\} \supset \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{V};\ |\boldsymbol{u}| \leqq 1\}.$$

[証明] 有限次元での話だから, $|\vec{a}| = 1$ なる $\vec{a} \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ を任意にひとつ固定したとき, 2 つの写像

$$S \ni X \mapsto X \cdot (\mathbf{1}\vec{a}) \in \mathcal{V},$$
$$S' \ni Y \mapsto (\mathbf{1}\vec{a}) \cdot Y \in \mathcal{V}$$

がいずれも全射であることを言えばよい. 上の写像が全射であることを示そう. 下の方も同様に示される.

$\dim S = \dim \mathcal{V} (= 2)$ だから, 線型写像 $S \ni X \mapsto X \cdot (\mathbf{1}\vec{a}) \in \mathcal{V}$ が全射であることを言うには, それが単射であることを言えばよい.

$X = {}^t(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}) \in S$ かつ $X \cdot (\mathbf{1}\vec{a}) = {}^t(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ と仮定する. このとき, $\vec{x_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ はいずれも $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ において $\vec{a}$ と直交する. $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ における $\vec{a} \neq \vec{0}$ の直交補空間は 1 次元だから, 行列 X の階数は 0 または 1 である. $X \in S$ より $X = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \mathcal{V})$ と書けるから, 行列 X の階数が 1 だったとすると, $\boldsymbol{x}$ が A の固有ベクトルであることになり, A が実固有値を持たないという仮定に反する. ゆえに X の階数は 0 すなわち $X = 0$ でなくてはならない. 証明終わり.

8.4 補題. $A\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に限る.

[証明] $\mathcal{V}$ における線型写像 $A - A'$ は歪対称だから, 対応する行列は対角化可能であり, かつその 2 つの固有値は複素共役な 2 つの純虚数である. $\mathcal{V} \ni \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ かつ $A\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x}$ があったとする. すると, 0 が $A - A'$ のひとつの固有値だから, $A - A'$ の固有値は 0 しかなくて, 更に対角化できることから, $A - A' = 0$ となる. ゆえに A は対称で, したがって実固有値を持つ. これは仮定に反する. 証明終わり.

8.5 補題. $Y \in S'$ かつ $Y \neq 0$ ならば, 写像 $S \ni X \mapsto X \cdot Y \in \mathcal{V}$ は全射である.

[証明] S と S' の定義より, $Y \in S'$ かつ $X \in S$ のとき $X \cdot Y \in \mathcal{V}$ であることは直ちにわかる.

$\dim S = \dim \mathcal{V}(= 2)$ だから, $Y \in S'$ かつ $Y \neq 0$ のとき, 線型写像 $S \ni X \mapsto X \cdot Y \in \mathcal{V}$ が単射であることを示せばよい.

そこで, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ で,

$$X = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (A\boldsymbol{x})_1 & x_1 \\ (A\boldsymbol{x})_2 & x_2 \\ (A\boldsymbol{x})_3 & x_3 \end{pmatrix} \in S,$$

$$Y = (\boldsymbol{y}, -A'\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 & -(A'\boldsymbol{y})_1 \\ y_2 & -(A'\boldsymbol{y})_2 \\ y_3 & -(A'\boldsymbol{y})_3 \end{pmatrix} \in S',$$

かつ $X \cdot Y = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ であると仮定して, $X = 0$ を示そう. $X \cdot Y = \mathbf{0}$ を成分ごとに書くと,

$$\begin{cases} (A\boldsymbol{x})_1 y_1 - x_1 (A'\boldsymbol{y})_1 = 0 \\ (A\boldsymbol{x})_2 y_2 - x_2 (A'\boldsymbol{y})_2 = 0 \\ (A\boldsymbol{x})_3 y_3 - x_3 (A'\boldsymbol{y})_3 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

である.

もしも $y_1 = (A'\boldsymbol{y})_1 = 0$ なら, $\boldsymbol{y}$ と $A'\boldsymbol{y}$ は, ともに $\mathcal{V}$ の部分空間 $\{\boldsymbol{z} \in \mathcal{V};\, z_1 = 0\}$ に属すが, この部分空間は 1 次元だから, $\boldsymbol{y}$ が A' の固有ベクトルということになり, A が実固有値を持たないという仮定に反する. ゆえに $(y_1, (A'\boldsymbol{y})_1) \neq (0, 0)$. したがって, (15) の第 1 式から,

$$x_1 = a_1 y_1 \quad \text{かつ} \quad (A\boldsymbol{x})_1 = a_1 (A'\boldsymbol{y})_1$$

なる $a_1 \in \mathbb{R}$ がある.

同様に,

$$x_2 = a_2 y_2 \quad \text{かつ} \quad (A\boldsymbol{x})_2 = a_2 (A'\boldsymbol{y})_2,$$
$$x_3 = a_3 y_3 \quad \text{かつ} \quad (A\boldsymbol{x})_3 = a_3 (A'\boldsymbol{y})_3$$

なる $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ がある.

もしも $(a_1, a_2, a_3) \neq (a, a, a)$ $(\forall a \in \mathbb{R})$ ならば, $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ とおくと, 上の関係式と, $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ それぞれの 3 つの成分の和が 0 であることから, $\boldsymbol{y}$ と $A'\boldsymbol{y}$ はともに $\mathbb{R}^3$ において $\boldsymbol{a}$ に直交する. すると, 空間

$$\mathcal{V} \cap \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3 ; \boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{a}\}$$

は 1 次元の線型空間だから, $A'\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}$ とは平行である. これは A が実固有値を持たないという仮定に反する.

ゆえに $a_1 = a_2 = a_3 = a$ である. すると $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{y}$ かつ $A\boldsymbol{x} = aA'\boldsymbol{y}$ だから $A\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{x}$. 補題 8.4 より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. ゆえに $X = 0$. 証明終わり.

8.6 補題. 次のような正定数 $C_{8.6}$ がある: $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$ かつ $|\vec{c}|, |\vec{d}| \leqq 1/C_{8.6}$ ならば,

$$\begin{aligned}&\{(\mathbf{1}\vec{c} + X) \cdot (\mathbf{1}\vec{d} + Y) - (\mathbf{1}\vec{c}) \cdot (\mathbf{1}\vec{d}) ; X \in S,\ Y \in S',\ |X| \vee |Y| \leqq C_{8.6}\} \\ &\quad \supset \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{V} ; |\boldsymbol{u}| \leqq 1\}.\end{aligned}$$

[証明] $Y_0 \in S'$, $|Y_0| = 1$ なる Y_0 をひとつ固定する. $C \geqq 1$ が十分大きいとし, $|\vec{c}|, |\vec{d}| \leqq 1/C$ で, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, $|\boldsymbol{u}| \leqq 1$ とする. このとき方程式

$$X \cdot (\mathbf{1}\vec{d} + Y_0) = \boldsymbol{u} - (\mathbf{1}\vec{c}) \cdot Y_0 \tag{16}$$

が $X \in S$, $|X| \leqq C'$ なる解を持つことが言えれば十分である. (C' は $\vec{c}, \vec{d}, \boldsymbol{u}$ に依らない正定数である; $C_{8.6}$ は $C_{8.6} = \max\{C, C'\}$ にとればよい.) 方程式 (16) の右辺は $\mathcal{V}$ のベクトルでノルム $\leqq 1 + 1/C \leqq 2$ だから, 少し一般にして, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ かつ $|\boldsymbol{v}| \leqq 2$ のとき,

$$X \cdot (\mathbf{1}\vec{d} + Y_0) = \boldsymbol{v}$$

が $X \in S$, $|X| \leqq C'$ なる解を持つことを言えばよい. この最後のことは, C を十分大きくとっておけば, 補題 8.5 から簡単な摂動の議論により導くことができる. 証明終り.

9 BMO マルチンゲールの因数分解

定理 7.5 を証明する前に, 次の BMO マルチンゲールの因数分解定理を示そう.

9.1 定理. 線型写像 $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ は実固有値を持たないと仮定する. $f = (f_J)$ は実数値の BMO マルチンゲール, $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqq 1$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$, $f_\Omega = \vec{a} \cdot \vec{b}$, と仮定する. このとき, 以下のような $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値マルチンゲール $\vec{g} = (\vec{g}_J)$, $\vec{h} = (\vec{h}_J)$ が存在する:

(i) $\vec{g} = (\vec{g}_J)$ は S-マルチンゲール, $\vec{h} = (\vec{h}_J)$ は S'-マルチンゲール;

(ii) $\vec{g}_\Omega = \vec{a}$, $\quad \vec{h}_\Omega = \vec{b}$;

(iii) すべての $J \in \mathcal{I}$ に対して $\vec{g}_J \cdot \vec{h}_J = f_J$;

(iv) $\|\vec{g}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq c$ かつ $\|\vec{h}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq c$;

(v) $\Delta_J(f) = \mathbf{0}$ なる J については $\Delta_J(\vec{g}) = \Delta_J(\vec{h}) = 0$;

(vi) すべての $\lambda > 0$ に対して,

$$|\{(\vec{g} - \vec{g}_\Omega)^* > \lambda\}| \leqq c\exp(-\lambda/c),$$
$$|\{(\vec{h} - \vec{h}_\Omega)^* > \lambda\}| \leqq c\exp(-\lambda/c).$$

[証明] 条件 (i), (ii), (iii) を満たす $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値マルチンゲール $\vec{g} = (\vec{g}_J)$ と $\vec{h} = (\vec{h}_J)$ を帰納的に構成する.

$\vec{g}_\Omega = \vec{a}$, $\vec{h}_\Omega = \vec{b}$ から始める. $\vec{g}_J$, $\vec{h}_J$ が $J \in \bigcup_{k=0}^n \mathcal{I}_k$ $(n \geqq 0)$ までできていたと仮定して, 各 $K \in \mathcal{I}_{n+1}$ に対して $\vec{g}_K$, $\vec{h}_K$ を定めたい. そのためには, 各 $J \in \mathcal{I}_n$ に対して $\vec{g}_{J(i)}$, $\vec{h}_{J(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ を決めればよい.

以下 $J \in \mathcal{I}_n$ をひとつ固定して $\vec{g}_{J(i)}$, $\vec{h}_{J(i)}$ の取り方を述べる. 帰納法の仮定により, $\vec{g}_J \cdot \vec{h}_J = f_J$ が成り立っている.

以下の記号を使う.

$$\boldsymbol{d}_J = \Delta_J(f) = \begin{pmatrix} f_{J(1)} - f_J \\ f_{J(2)} - f_J \\ f_{J(3)} - f_J \end{pmatrix} \in \mathcal{V},$$

$$U_J = \Delta_J(\vec{g}) \in S, \qquad V_J = \Delta_J(\vec{h}) \in S'.$$

($\boldsymbol{d}_J$ は与えられていて, U_J と V_J はこれから定める.)

上の記号と §8 の記号を使うと

$$\begin{pmatrix} \vec{g}_{J(1)} \\ \vec{g}_{J(2)} \\ \vec{g}_{J(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{h}_{J(1)} \\ \vec{h}_{J(2)} \\ \vec{h}_{J(3)} \end{pmatrix} = (\mathbf{1}\vec{g}_J + U_J) \cdot (\mathbf{1}\vec{h}_J + V_J),$$

$$\begin{pmatrix} f_{J(1)} \\ f_{J(2)} \\ f_{J(3)} \end{pmatrix} = \mathbf{1} f_J + \boldsymbol{d}_J = (\mathbf{1}\vec{g}_J) \cdot (\mathbf{1}\vec{h}_J) + \boldsymbol{d}_J$$

である. (下の式の最後の等号は帰納法の仮定.) 帰納法のステップを進めるためには, U_J, V_J を,

$$U_J \in S, \qquad V_J \in S', \tag{17}$$
$$(\mathbf{1}\vec{g}_J + U_J) \cdot (\mathbf{1}\vec{h}_J + V_J) = (\mathbf{1}\vec{g}_J) \cdot (\mathbf{1}\vec{h}_J) + \boldsymbol{d}_J \tag{18}$$

を満たすように取ればよい.

3 つの場合にわける.

場合 1: $|\vec{g}_J| \leqq 1$ かつ $|\vec{h}_J| \leqq 1$ のとき.

このときは, 補題 8.6 より,

$$\begin{aligned}&(\mathbf{1}(\vec{g}_J/C_{8.6})+X)\cdot(\mathbf{1}(\vec{h}_J/C_{8.6})+Y)\\&\quad=(\mathbf{1}(\vec{g}_J/C_{8.6}))\cdot(\mathbf{1}(\vec{h}_J/C_{8.6}))+\boldsymbol{d}_J/C_{8.6}^2,\\&X\in S,\qquad Y\in S',\qquad |X|\vee|Y|\leqq C_{8.6}\end{aligned}$$

なる X, Y がとれる. ($\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqq 1$ より $|\boldsymbol{d}_J| \leqq \sqrt{3}$ だから, $C_{8.6}$ は十分に大きいとしてよいので, $|\boldsymbol{d}_J/C_{8.6}^2| \leqq 1$ は成り立っている.) そこで, $\boldsymbol{d}_J \neq \mathbf{0}$ のときはこの X, Y を用いて $U_J = C_{8.6}X$, $V_J = C_{8.6}Y$ と定め, $\boldsymbol{d}_J = \mathbf{0}$ のときは $U_J = V_J = 0$ と定める.

そうすると, (17), (18) は成り立ち, 更に評価

$$|U_J|\vee|V_J|\leqq C_{8.6}^2$$

が成り立つ. 各 $K = J(i)$ $(i = 1, 2, 3)$ について,

$$|\vec{g}_K|\leqq|\vec{g}_J|+|U_J|\leqq 1+C_{8.6}^2$$

で, $|\vec{h}_K|$ についても同様だから,

$$|\vec{g}_K|\vee|\vec{h}_K|\leqq 1+C_{8.6}^2 \tag{19}$$

が成り立つ.

場合 2: $|\vec{g}_J| > |\vec{h}_J|$ かつ $|\vec{g}_J| > 1$ のとき.

このとき, もしも $\boldsymbol{d}_J = \mathbf{0}$ なら $U_J = V_J = 0$ にとる. もし $\boldsymbol{d}_J \neq \mathbf{0}$ なら, 補題 8.3 により

$$\mathbf{1}(|\vec{g}_J|^{-1}\vec{g}_J)\cdot Y=|\boldsymbol{d}_J|^{-1}\boldsymbol{d}_J,\qquad Y\in S',\qquad |Y|\leqq C_{8.3}$$

なる Y が存在するから, $V_J = |\boldsymbol{d}_J||\vec{g}_J|^{-1}Y$ にとり, $U_J = 0$ とする. いずれの場合にも (17), (18) は成り立ち, 更に

$$|U_J|\vee|V_J|=|V_J|\leqq C_{8.3}|\boldsymbol{d}_J||\vec{g}_J|^{-1}\leqq C_{8.3}|\boldsymbol{d}_J|. \tag{20}$$

また, 各 $K = J(i)$ $(i = 1, 2, 3)$ について, $|\vec{g}_K| = |\vec{g}_J| > |\vec{h}_J|$ だから,

$$|\vec{g}_K|\vee|\vec{h}_K|\geqq|\vec{g}_J|\vee|\vec{h}_J| \tag{21}$$

が成り立つ.

場合 3: $|\vec{g}_J| \leqq |\vec{h}_J|$ かつ $|\vec{h}_J| > 1$ のとき.

$\boldsymbol{d}_J=\boldsymbol{0}$ なら, $U_J=V_J=0$ にとる. $\boldsymbol{d}_J\neq\boldsymbol{0}$ なら, 補題 8.3 より

$$X\cdot(\mathbf{1}|\vec{h}_J|^{-1}\vec{h}_J)=|\boldsymbol{d}_J|^{-1}\boldsymbol{d}_J,\qquad X\in S,\qquad |X|\leqq C_{8.3}$$

なる X が存在するから, $U_J=|\boldsymbol{d}_J||\vec{h}_J|^{-1}X$ にとり, $V_J=0$ とする. 場合 2 と同様に, (17), (18) は成り立ち, 更に

$$|U_J|\vee|V_J|=|U_J|\leqq C_{8.3}|\vec{h}_J|^{-1}|\boldsymbol{d}_J|\leqq C_{8.3}|\boldsymbol{d}_J|, \tag{22}$$

および, 各 $K=J(i)$ $(i=1,2,3)$ について,

$$|\vec{g}_K|\vee|\vec{h}_K|\geqq|\vec{g}_J|\vee|\vec{h}_J| \tag{23}$$

が成り立つ.

以上のようにして帰納的に定義した $\vec{g}=(\vec{g}_J)$, $\vec{h}=(\vec{h}_J)$ が定理の条件を満たすことを示そう.

条件 (i), (ii), (iii), (v) が成り立つことは構成法から明かである. 条件 (vi) は John-Nirenberg の定理 (§2) によって条件 (iv) から出るので, (iv) が成り立つことを示せばよい. $\vec{g}$ も $\vec{h}$ も同様に扱えるから $\vec{g}$ の方だけ, すなわち $\|\vec{g}\|_{\mathrm{BMO}}\leqq c$ だけ示す.

2 つの場合を分けて考える.

$|\vec{a}|\vee|\vec{b}|>1$ の場合.

このときは, (21) と (23) により, すべての $J\in\mathcal{I}$ について, $|\vec{g}_J|\vee|\vec{h}_J|>1$ であって, (20), (22) より, $|U_J|\leqq C_{8.3}|\boldsymbol{d}_J|$ となる. ゆえに命題 3.6 を使って

$$\|\vec{g}\|_{\mathrm{BMO}}\leqq C_{8.3}\|f\|_{\mathrm{BMO}}\leqq C_{8.3}$$

が言える.

$|\vec{a}|\vee|\vec{b}|\leqq 1$ の場合.

このときは, triadic interval の族 $\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G}=\{J\in\mathcal{I};\,|\vec{g}_J|\vee|\vec{h}_J|>1\}$$

で定義する. $\Omega\notin\mathcal{G}$ である. (21) と (23) によって, $J\in\mathcal{G}$ かつ或 $i=1,2,3$ について $K=J(i)$ のとき $K\in\mathcal{G}$ である. このことから, triadic interval J, K について,

$$K\subset J\in\mathcal{G}\quad \text{ならば}\quad K\in\mathcal{G} \tag{24}$$

が言える.

マルチンゲール $\vec{g}$ を

$$\begin{aligned}
\vec{g}_R&=\vec{a}+\sum_{J\supset\tilde{R}}w_J[U_J](R)=\vec{g}_R^{(1)}+\vec{g}_R^{(2)},\\
\vec{g}_R^{(1)}&=\vec{a}+\sum_{J\notin\mathcal{G},\,J\supset\tilde{R}}w_J[U_J](R),\\
\vec{g}_R^{(2)}&=\sum_{J\in\mathcal{G},\,J\supset\tilde{R}}w_J[U_J](R),
\end{aligned} \tag{25}$$

と 2 つにわける. $\vec{g}^{(1)} = (\vec{g}_R^{(1)})_{R\in\mathcal{I}}$ と $\vec{g}^{(2)} = (\vec{g}_R^{(2)})_{R\in\mathcal{I}}$ はともに $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値のマルチンゲールである.

$\vec{g}^{(2)}$ については, $J \in \mathcal{G}$ のとき (20), (22) によって $|U_J| \leqq C_{8.3}|\boldsymbol{d}_J|$ だから, 命題 3.6 を使って,

$$\|\vec{g}^{(2)}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq C_{8.3}\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqq C_{8.3}$$

がわかる.

$\vec{g}^{(1)}$ については,

$$|\vec{g}_R^{(1)}| \leqq 1 + C_{8.6}^2 \qquad (\forall R \in \mathcal{I})$$

が成り立つ. 実際, $R \neq \Omega$ かつ $\tilde{R} \notin \mathcal{G}$ ならば, (24) によって $J \supset \tilde{R}$ なるすべての $J \in \mathcal{I}$ が $J \notin \mathcal{G}$ だから, $\vec{g}_R^{(1)} = \vec{g}_R$ であって, (19) により $|\vec{g}_R^{(1)}| = |\vec{g}_R| \leqq 1 + C_{8.6}^2$. また, $R \neq \Omega$ かつ $\tilde{R} \in \mathcal{G}$ ならば, $\tilde{R} \subset K \in \mathcal{G}^{\max}$ なる $K \neq \Omega$ があり, (24) によって $\vec{g}_R^{(1)} = \vec{g}_K$ となり, 従って再び (19) により $|\vec{g}_R^{(1)}| = |\vec{g}_K| \leqq 1 + C_{8.6}^2$ となる. 最後に $R = \Omega$ については $|\vec{g}_\Omega^{(1)}| = |\vec{a}| \leqq 1$ である.

ゆえに命題 2.5 と命題 3.7 から

$$\|\vec{g}^{(1)}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq \|\vec{g}\|_{L^\infty} \leqq 1 + C_{8.6}^2.$$

以上の $\vec{g}^{(1)}$ と $\vec{g}^{(2)}$ の評価を合わせて

$$\|\vec{g}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq \|\vec{g}^{(1)}\|_{\mathrm{BMO}} + \|\vec{g}^{(2)}\|_{\mathrm{BMO}} \leqq C_{8.3} + 1 + C_{8.6}^2.$$

定理 9.1 の証明終わり.

9.2 注意. (1) 上記の証明で, $\vec{g}$ の BMO ノルムを評価するのに, 場合 2, 3 の J について,

$$|U_J| \leqq C_{8.3}|\boldsymbol{d}_J|$$

を使ったが, (20) と (22) では, これより強い

$$|U_J| \leqq C_{8.3}(|\vec{g}_J| \vee |\vec{h}_J|)^{-1}|\boldsymbol{d}_J|$$

という評価が得られている. この強い評価を使うと, 定理 9.1 の (vi) より強く

$$\begin{aligned} |\{(\vec{g} - \vec{g}_\Omega)^* > \lambda\}| &\leqq c\exp[-\lambda(|\vec{a}| \vee |\vec{b}| \vee \lambda)/c] \\ &\leqq c\exp(-\lambda^2/c) \qquad (\forall\lambda > 0) \end{aligned}$$

という評価を示すことができる. $\vec{h}$ についても同様である.

(2) U_J, V_J の作り方を少し換えると, すべての $J \in \mathcal{I}$ について

$$|U_J| \vee |V_J| \leqq c|\boldsymbol{d}_J|^{1/2}$$

が成り立つようにすることもできる.

10 内山の因数分解定理の証明

定理 7.5 を証明しよう. 基本となるアイデアは, §5 において特異積分作用素の H^p 有界性 (命題 5.3) を BMO 有界性 (命題 5.2) から導いた議論と同じである.

$f=(f_J)$ はマルチンゲールで, $f_\Omega=0$ とする. また, $\|f\|_{H^p}=1$ としてよい.

各非負整数 n に対して, triadic interval の族 $\mathcal{G}_n$, $\mathcal{H}_n$ とマルチンゲール $f^{(n)}$ を命題 5.3 の証明と同じに定義する.

求める $\mathbb{R}^2_{\mathrm{row}}$-値マルチンゲール $\vec{g}, \vec{h}$ に対して §9 と同じく

$$U_J=\Delta_J(\vec{g}), \qquad V_J=\Delta_J(\vec{h})$$

と書く. $\vec{g}$ と $\vec{h}$ も f と同様に分解して,

$$\vec{g}_R=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{g}_R^{(n)}, \tag{26}$$

$$\vec{h}_R=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{h}_R^{(n)}, \tag{27}$$

$$\vec{g}_R^{(n)}=\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ J\supset\tilde{R}}} w_J[U_J](R), \tag{28}$$

$$\vec{h}_R^{(n)}=\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ J\supset\tilde{R}}} w_J[V_J](R) \tag{29}$$

と書く.

次のことに注意しよう:

$$J, R\in\mathcal{I}, \quad J\supset\tilde{R}, \quad \tilde{R}\notin\mathcal{H}_{n+1}\Longrightarrow J\notin\mathcal{H}_{n+1}.$$

このことと, 列 $\{\mathcal{H}_n\}$ が減少列であることから, $\tilde{R}\notin\mathcal{H}_{n+1}$ ならば

$$f_R=\sum_{\substack{J\notin\mathcal{H}_{n+1}\\ J\supset\tilde{R}}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_i\setminus\mathcal{H}_{i+1}\\ J\supset\tilde{R}}} w_J[\boldsymbol{d}_J](R)=\sum_{i=0}^{n} f_R^{(i)}$$

(ただし $\boldsymbol{d}_J=\Delta_J(f)$) となる. すなわち,

$$\tilde{R}\notin\mathcal{H}_{n+1}\Longrightarrow f_R=\sum_{i=0}^{n} f_R^{(i)}. \tag{30}$$

$\vec{g}$ と $\vec{h}$ についても同様で,

$$\tilde{R}\notin\mathcal{H}_{n+1}\Longrightarrow \vec{g}_R=\sum_{i=0}^{n}\vec{g}_R^{(i)} \text{ かつ } \vec{h}_R=\sum_{i=0}^{n}\vec{h}_R^{(i)}. \tag{31}$$

さて, n に関する帰納法によって, 以下の条件 (i)~(iii) をみたす $\vec{g}^{(n)}$, $\vec{h}^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を構成しよう:

(i) $\vec{g}^{(n)}$ は (28) の形をした S-マルチンゲール (すなわち, そこの $U_J \in S$);

(ii) $\vec{h}^{(n)}$ は (29) の形をした S'-マルチンゲール (すなわち, そこの $V_J \in S'$);

(iii) $\tilde{R} \notin \mathcal{H}_{n+1}$ のとき,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \vec{g}_R^{(i)}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \vec{h}_R^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{n} f_R^{(i)}.$$

このような $\vec{g}^{(n)}$, $\vec{h}^{(n)}$ が構成されたら, (26), (27) によって $\vec{g}$, $\vec{h}$ を定義すれば,

(iv) $\vec{g}$ は S-マルチンゲール, $\vec{h}$ は S'-マルチンゲール,

(v) $\vec{g}_\Omega = \vec{h}_\Omega = \vec{0}$,

(vi) すべての $R \in \mathcal{I}$ に対して $\vec{g}_R \cdot \vec{h}_R = f_R$,

となる. ((vi) は (iii) と (30), (31) による.)

そこで, $\vec{g}^{(i)}$, $\vec{h}^{(i)}$ が $i = 0, 1, \cdots, n-1$ まではできていたと仮定する. $(n = 0$ のときにはこの仮定は vacuous に成り立っている.)

$\vec{g}^{(n)}$ と $\vec{h}^{(n)}$ を構成するには, すべての $J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ に対して $U_J \in S$ と $V_J \in S'$ とを決めればよい. 帰納法の仮定と (30) と (31) によって, $\tilde{R} \notin \mathcal{H}_n$ のときは条件 (iii) の等式は, $\vec{g}^{(n)}$, $\vec{h}^{(n)}$ を (28), (29) の形にとる限り, そのとり方にかかわらず成り立つ. ゆえに, すべきことは, 条件 (iii) の等式が $\tilde{R} \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ なるすべての R に対して成り立つように $U_J \in S$ と $V_J \in S'$ を $J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ に対して決めることである.

$\tilde{R} \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$ ならば, $K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ かつ $K \supset \tilde{R}$ なる K が唯ひとつ存在する. R と K がこの状況にあるとする. すると, triadic interval J について,

$$J \notin \mathcal{H}_n \text{ かつ } J \supset \tilde{R} \Longleftrightarrow J \supset \tilde{K},$$
$$J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1} \text{ かつ } J \supset \tilde{R} \Longleftrightarrow K \supset J \supset \tilde{R}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \vec{g}_R^{(i)} &= \sum_{\substack{J \notin \mathcal{H}_n \\ J \supset \tilde{K}}} w_J[U_J](K) + \sum_{\substack{J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1} \\ K \supset J \supset \tilde{R}}} w_J[U_J](R) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{g}_K^{(i)} + \sum_{\substack{J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1} \\ K \supset J \supset \tilde{R}}} w_J[U_J](R) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{g}_K^{(i)} + \vec{g}_R^{(n)}
\end{aligned}$$

となる．同様に，

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{h}_R^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{h}_K^{(i)} + \sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[V_J](R),$$

$$f_R = f_K + f_R^{(n)}$$

である．

したがって，$K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ をひとつ固定して，

$$J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1} \text{ かつ } J \subset K$$

なる各 J について $U_J \in S$ と $V_J \in S'$ を決めて，$R \in \mathcal{I}$, $R \subset K$ なるすべての R に対して

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \vec{g}_K^{(i)} + \sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[U_J](R)\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \vec{h}_K^{(i)} + \sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[V_J](R)\right) = f_K + f_R^{(n)} \tag{32}$$

が成り立つようにできたら，すべての $K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ に対するそのような U_J と V_J を集めて，構成すべき $\vec{g}^{(n)}$ と $\vec{h}^{(n)}$ が得られることになる．

そこで，$K \in \mathcal{G}_n^{\max}$ をひとつ固定する．

まず，帰納法の仮定によって，

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \vec{g}_K^{(i)}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \vec{h}_K^{(i)}\right) = f_K$$

が成り立っている．($n = 0$ のときは，$K = \Omega$ で，上の等式は $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0 = f_\Omega$ で成り立つ.) また，$f^{(n)}$ については

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty} \leqq 3 \cdot 2^n, \tag{33}$$

$$\Delta_J(f^{(n)}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow J \in \mathcal{H}_n \setminus H_{n+1} \tag{34}$$

が成り立つ (§5 参照)．ゆえに，BMO マルチンゲールの因数分解定理 (§9) を Ω を K で置き換えて使うことができ，次のような $\tilde{U}_J$, $\tilde{V}_J$ が得られる:

(a) $\tilde{U}_J \in S$, $\tilde{V}_J \in S'$ ($J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$, $J \subset K$);

(b) すべての $R \subset K$, $R \in \mathcal{I}$ に対して,

$$\left((3\cdot 2^n)^{-p/q}\sum_{i=0}^{n-1}\vec{g}_K^{(i)} + \sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[\tilde{U}_J](R)\right)$$
$$\cdot\left((3\cdot 2^n)^{-p/r}\sum_{i=0}^{n-1}\vec{h}_K^{(i)} + \sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[\tilde{V}_J](R)\right)$$
$$= (3\cdot 2^n)^{-1}f_K + (3\cdot 2^n)^{-1}f_R^{(n)};$$

(c) すべての $\lambda > 0$ に対して,

$$\left|\left\{x\in K\,;\ \sup_{K\supset R\ni x}\left|\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[\tilde{U}_J](R)\right| > \lambda\right\}\right| \leqq c\exp(-\lambda/c)|K|,$$
$$\left|\left\{x\in K\,;\ \sup_{K\supset R\ni x}\left|\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[\tilde{V}_J](R)\right| > \lambda\right\}\right| \leqq c\exp(-\lambda/c)|K|.$$

そこで, $J \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n+1}$, $J \subset K$ なる各 J に対して

$$U_J = (3\cdot 2^n)^{p/q}\tilde{U}_J, \qquad V_J = (3\cdot 2^n)^{p/r}\tilde{V}_J$$

とおく. すると, もちろん $U_J \in S$, $V_J \in S'$ であり, (32) が成り立ち, さらに, すべての $\lambda > 0$ に対して

$$\left|\left\{x\in K\,;\ \sup_{K\supset R\ni x}\left|\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[U_J](R)\right| > (3\cdot 2^n)^{p/q}\lambda\right\}\right| \leqq c\exp(-\lambda/c)|K|,$$
$$\left|\left\{x\in K\,;\ \sup_{K\supset R\ni x}\left|\sum_{\substack{J\in\mathcal{H}_n\setminus\mathcal{H}_{n+1}\\ K\supset J\supset\tilde{R}}} w_J[V_J](R)\right| > (3\cdot 2^n)^{p/r}\lambda\right\}\right| \leqq c\exp(-\lambda/c)|K|.$$

も成り立つ.

以上で, n に関する帰納法により, 条件 (i)~(iii) をみたす $\vec{g}^{(n)}$, $\vec{h}^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を構成することができ, したがって (iv), (v), (vi) をみたすマルチンゲール $\vec{g}, \vec{h}$ が得られた.

さらに, 上で構成した $\vec{g}^{(n)}$ については,

$$\left|\left\{(\vec{g}^{(n)})^* > (3\cdot 2^n)^{p/q}\lambda\right\}\right| \leqq c\exp(-\lambda/c)\left|\{f^{**}+2>2^n\}\right|,$$
$$\{(\vec{g}^{(n)})^* > 0\} \subset \{f^{**}+2>2^n\}$$

が成り立ち, $\vec{h}^{(n)}$ についても同様の評価 (p/q は p/r で置き換える) が成り立つ (§5 の (11), (12) 参照). これらの評価から

$$\|\vec{g}\|_{H^q} = \|(\vec{g})^*\|_{L^q} \leqq c,$$
$$\|\vec{h}\|_{H^r} = \|(\vec{h})^*\|_{L^r} \leqq c$$

を導くのは §5 と同様にできるから省略する. 定理 7.5 は証明された.

参考文献

[BGS] Burkholder, D. L., R. F. Gundy, and M. L. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. Amer. Math. Soc. **157**(1971), 137–153.

[CRW] Coifman, R. R., R. Rochberg, and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann of Math. **103**(1976), 611–635.

[FS] Fefferman, C., and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. **129**(1972), 137-193.

[JN] John, F., and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. **14**(1961), 415–426.

[M1] Miyachi, A., Products of distributions in H^p spaces, Tôhoku Math. J. **35**(1983), 483–498.

[M2] Miyachi, A., Weak factorization of distributions in H^p spaces, Pacific J. Math. **115**(1984), 165–175.

[U1] Uchiyama, A., The factorization of H^p on the space of homogeneous type, Pacific J. Math. **92**(1981), 453–468.

[U2] Uchiyama, A., Factorization of triadic H^p, preprint, 1989.

[Z] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Vol. I, Cambridge Univ. Press, 1959.